

Egzamin z Matematyki Dyskretnej

26 czerwca 2019

część zadaniowa

Każde zadanie należy oddać na **oddzielnej**, czytelnie podpisanej kartce.

1. Dany jest n -elementowy zbiór X , przy czym $n > 0$. Wykaż, że

$$\sum_{A, B \subseteq X} |A \cup B| = 3n \cdot 4^{n-1}.$$

2. W klasie jest n uczniów. Stoją oni w jednym szeregu przed wychowawcą, który ma ich podzielić na dowolną liczbę niepustych zespołów (w szczególności zespołów może być 1 lub n) i w każdym z zespołów wyznaczyć szefa. Zespół może składać się wyłącznie z uczniów stojących kolejno w szeregu. Na ile różnych sposobów wychowawca może tego dokonać? Ułóż odpowiednie równanie lub układ równań rekurencyjnych i wyznacz wzór ogólny.

3. Dany jest klocek w kształcie graniastoslupa trójkątnego prawidłowego. Na ile istotnie różnych sposobów (uwzględniamy tylko obroty) można pomalować jednocześnie jego wierzchołki i ściany, mając do dyspozycji 5 kolorów?

Uwaga. Graniastosłup trójkątny *prawidłowy* ma podstawy będące trójkątami równobocznymi oraz krawędzie boczne prostopadłe do nich.

4. Siedmiokąt podzielono na wypukłe pięciokąty i sześciokąty w taki sposób, że każdy wierzchołek siedmiokąta jest wierzchołkiem co najmniej trzech wielokątów podziału. Udowodnij, że w tym podziale jest co najmniej 27 pięciokątów.

5. Załóżmy, że m i k są takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $m \geq k + 1$. Definiujemy graf dwudzielny $G = (V_1, V_2, E)$, którego wierzchołkami są pewne podzbiory zbioru $[2m]$, w następujący sposób:

— $V_1 = \{A \subseteq [2m] : |A| = k\}$,

— $V_2 = \{B \subseteq [2m] : |B| = k + 1\}$,

— dla $A \in V_1$ oraz $B \in V_2$

$$\{A, B\} \in E \iff A \subseteq B.$$

Udowodnij, że w grafie G istnieje skojarzenie pełne z V_1 do V_2 .

Egzamin z Matematyki Dyskretnej
26 czerwca 2019, część teoretyczna

1. Podaj wzór (w postaci odpowiedniej sumy) na liczbę $s_{n,k}$ funkcji ze zbioru $[n]$ na zbiór $[k]$.
2. Zdefiniuj liczbę Stirlinga drugiego rodzaju $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ i **uzasadnij** kombinatorycznie tożsamość $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{s_{n,k}}{k!}$.
3. Podaj wzór na liczbę rozmieszczeń n nierozróżnialnych kul w k rozróżnialnych urnach, z których żadna nie może być pusta.
4. Zdefiniuj wykładniczą funkcję tworzącą ciąg liczbowego $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i **wyznacz** ją (w postaci zwartej — bez sumowania) dla ciągu $a_n = t^n$, gdzie t jest ustaloną liczbą dodatnią.

5. Podaj (wraz z **uzasadnieniem**) przykład grafu, który nie spełnia założeń twierdzenia Orego, ale posiada cykl Hamiltona.

6. Narysuj drzewo o zbiorze wierzchołków [7] i kodzie Prüfera (1, 2, 1, 4, 2).

7. **Wyznacz** liczbę chromatyczną grafu ostrosłupa n -kątnego (wierzchołki ostrosłupa są wierzchołkami grafu, a krawędzie ostrosłupa — krawędziami grafu).